Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Lördagen den 21 december 2013 klockan 08.30-11.30 i M.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 070-3744377, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

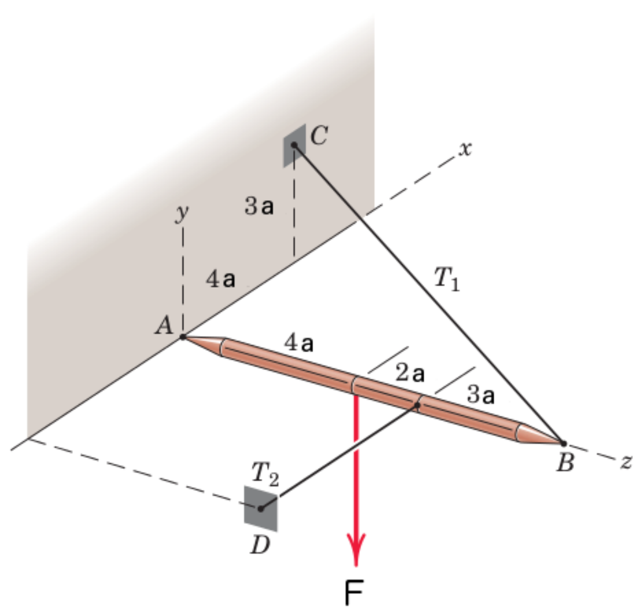
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

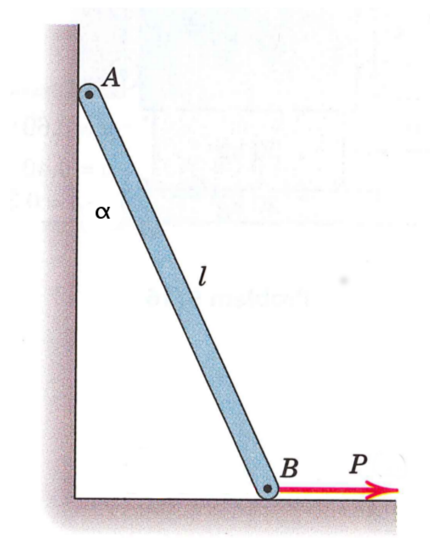
Rättningsgranskning: Måndag 20/1 2014 kl. 12-13 i rum O6103B.

Uppgifter

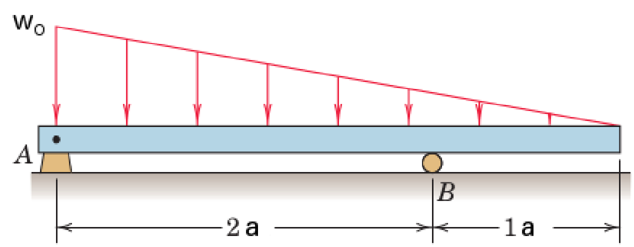
1. Antag att vikten hos staven är försumbar jämfört med kraften F. Bestäm spänningarna T_1 och T_2 i linorna, och kraften som verkar på kul-leden (dvs staven fritt vridbar kring punkten A) i punkten A, vid jämvikt.



2. Den homogena staven AB med massa m och längd l lutar mot en vertikal vägg enligt figuren. Den statiska friktionskoefficienten mellan staven och alla stödytor är μ_s. Bestäm kraften P, riktad enligt figuren (dvs man drar i staven från höger i punkten B), vilken precis gör att staven börjar glida.



3. Bestäm det maximala böjmomentet M_{max} för den belastade balken och specificera avståndet x_{max} där M_{max} inträffar. Koordinaten x mäts från balkens vänstra ändpunkt.

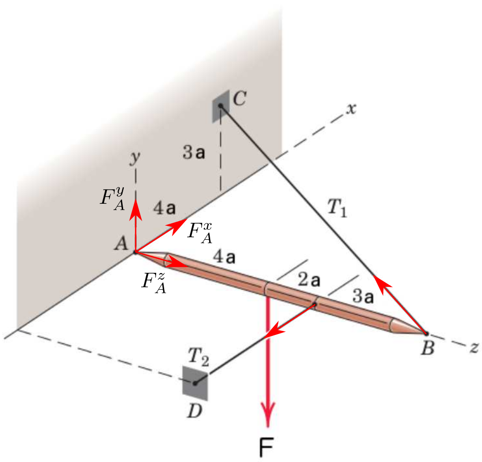


Lycka till!

1 Tenta Mekanik 1 2013-12-21

2 Lösningsförslag

2.1 1)



Den geometriska uppställningen ger följande uttryck för vektorerna B, C och krafterna T_1, T_2:

$$\begin{aligned} B &= a(0,0,9) \\ C &= a(4,3,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C-B &= a(4,3,-9) \\ |C-B| &= a\sqrt{106} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1\frac{C-B}{|C-B|} \\ &= T_1\frac{1}{\sqrt{106}}(4,3,-9) \\ T_2 &= T_2(-1,0,0) \end{aligned}$$

I figuren visas krafterna från friläggning av stången.

Kraftjämvikt ger tre ekvationer:

$$\begin{aligned} F_A^x + T_1^x - T_2 &= 0 \qquad (x) \\ F_A^y - F + T_1^y &= 0 \qquad (y) \\ F_A^z + T_1^z &= 0 \qquad (z) \end{aligned}$$

Momentjämvikt kring punkten A ger en vektorekvation:

$$\begin{aligned} B \times T_1 - 4aF(\hat{z}\times\hat{y}) - 6aT_2(\hat{z}\times\hat{x}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ B\times T_1 + 4aF\hat{x} - 6aT_2\hat{y} &= 0 \end{aligned}$$

Vektorprodukten i första termen är

$$
\begin{aligned}
B \times T_1 &= T_1 \frac{B \times (C-B)}{|C-B|} \\
&= T_1 \frac{B \times C}{|C-B|} \\
&= \frac{T_1}{a\sqrt{106}} a^2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{aT_1}{\sqrt{106}}(-27, 36, 0)
\end{aligned}
$$

Momentjämvikt kring punkten A ger alltså uppehov till de två ekvationerna

$$
\begin{aligned}
4aF - \frac{27}{\sqrt{106}} aT_1 &= 0 \\
-6aT_2 + \frac{36}{\sqrt{106}} aT_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Ur dessa löser vi för T_1 och T_2:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{4\sqrt{106}}{27} F \\
T_2 &= \frac{6 \cdot 36}{\sqrt{106}} T_1 = \frac{8}{9} F
\end{aligned}
$$

Från kraftjämviktsekvationerna får vi nu

$$
\begin{aligned}
F_A^x &= T_2 - T_1^x \\
&= \frac{8}{9} F - \frac{4\sqrt{106}}{27} \frac{4}{\sqrt{106}} F \\
&= \frac{8}{27} F
\end{aligned}
$$

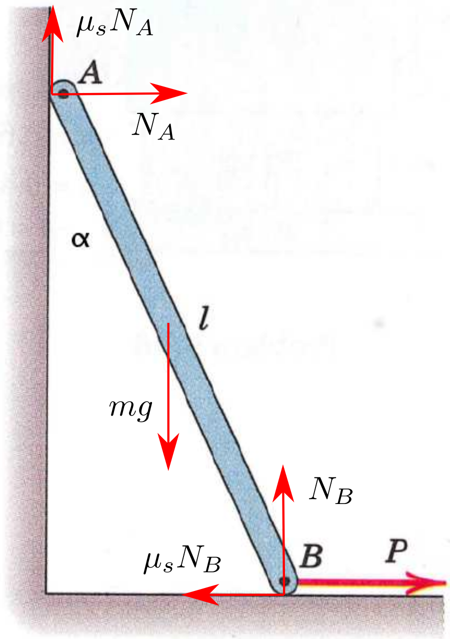
$$
\begin{aligned}
F_A^y &= F - T_1^y \\
&= F - \frac{4\sqrt{106}}{27} \frac{3}{\sqrt{106}} F \\
&= \frac{5}{9} F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_A^z &= -T_1^z \\
&= -\frac{4\sqrt{106}}{27} \left(-\frac{9}{\sqrt{106}} \right) F \\
&= \frac{4}{3} F
\end{aligned}
$$

2.1.1 Svar

$$
\begin{aligned}
F_A &= F\left(\frac{8}{27}, \frac{5}{9}, \frac{4}{3} \right) \\
T_1 &= \frac{4\sqrt{106}}{27} F \\
T_2 &= \frac{8}{9} F
\end{aligned}
$$

2.2 2)



Figuren visar krafterna från friläggning av stången. Eftersom stången precis börjar glida vid både A och B så är friktionskraften maximal vid båda dessa punkter.

Kraftjämvikt vertikal led

$$\mu_s N_A + N_B - mg = 0$$

Momentjämvikt runt B

$$\begin{aligned}
\frac{l}{2}\sin(\theta)mg - l\cos(\theta)N_A - l\sin(\theta)\mu_s N_A &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
N_A &= \frac{\frac{1}{2}\sin(\theta)mg}{\cos(\theta)+\mu_s\sin(\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{mg\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}
\end{aligned}$$

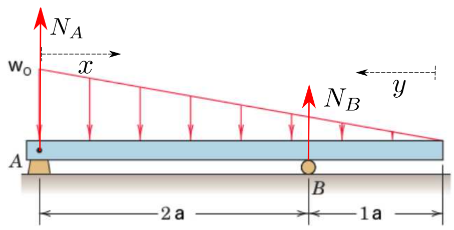
Insatt i kraftjämvikt vertikal led ger detta

$$\begin{aligned}
N_B &= mg - \mu_s N_A \\
&= mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_s\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right)
\end{aligned}$$

Kraftjämvikt i horizontell led ger nu

$$\begin{aligned}
N_A - \mu_s N_B + P &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
P &= \mu_s N_B - N_A \\
&= \mu_s mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_s\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) - \frac{1}{2}\frac{mg\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)} \\
&= mg\left(\frac{1}{2}\frac{\mu_s(2+2\mu_s\tan(\theta)-\mu_s\tan(\theta))-\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \\
&= mg\left(\frac{1}{2}\frac{2\mu_s+\mu_s^2\tan(\theta)-\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \\
&= \frac{mg}{2}\left(\frac{2\mu_s+(\mu_s^2-1)\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right)
\end{aligned}$$

2.3 3)



Resultanten för den distribuerade kraften och dess angrepspunkt ges av

$$\begin{aligned} R &= \frac{3aW_0}{2} \\ x_R &= a. \end{aligned}$$

Kraftjämvikt för hela balken och momentjämvikt kring A ger två ekvationer

$$\begin{aligned} N_A + N_B - R &= 0, \\ -aW_0\frac{3a}{2} + 2aN_B &= 0. \end{aligned}$$

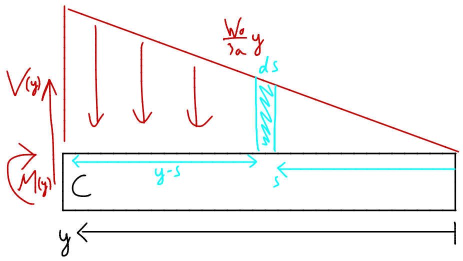
Ur momentjämviktsekvationen fås N_B:

$$N_B = \frac{3a}{4}W_0$$

I räkningarna används koordinatsystemet y som enligt figur mäts från balkens högra sida. Ekvationen för den distribuerade kraften ges då av

$$W(y) = \frac{W_0}{3a}y.$$

2.3.1 $y < a$:



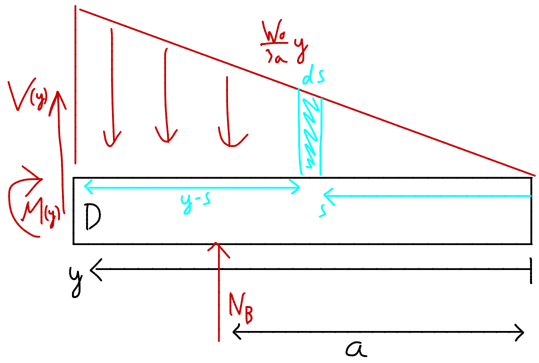
Friläggning av en bit från höger med skuvkraft uppåt ger:

$$\begin{aligned} V(y) - \int_0^y \frac{W_0}{3a}sds &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ V(y) &= \frac{W_0}{3a}\frac{y^2}{2} \\ &= \frac{W_0y^2}{6a} \end{aligned}$$

Momentjämvikt kring punkten C:

$$
\begin{aligned}
-M(y) - \int_0^y \frac{W_0}{3a} s(y-s)ds &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
M(y) &= -\frac{W_0}{3a}\left[\frac{s^2}{2}y - \frac{s^3}{3}\right]_0^y \\
&= -\frac{W_0}{3a}\left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3}\right) \\
&= -\frac{W_0 y^3}{18a}
\end{aligned}
$$

2.3.2 $a < y < 2a$:



$$
\begin{aligned}
V(y) + N_B - \int_0^y \frac{W_0}{3a} s ds &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
V(y) &= \frac{W_0 y^2}{6a} - \frac{3a}{4}W_0
\end{aligned}
$$

Momentjämvikt kring punkten D:

$$
\begin{aligned}
-M(y) - \int_0^y \frac{W_0}{3a} s(y-s)ds + (y-a)N_B &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
M(y) &= -\frac{W_0 y^3}{18a} + (y-a)\frac{3a}{4}W_0
\end{aligned}
$$

$M_{\max}$ ges vid $M' = 0 = V$ dvs

$$
\begin{aligned}
-\frac{W_0 y_{\max}^2}{6a} + \frac{3a}{4}W_0 &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
y_{\max} &= \sqrt{\frac{18}{4}a^2} \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}a
\end{aligned}
$$

Vilket i koordinatsystemet x blir

$$
\begin{aligned}
x_{\max} &= 3a - y_{\max} \\
&= 3a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Böjmomentet där är

$$
M(y_{\max}) = \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1)W_0 a^2
$$